Interpolacija i aproksimacija (skica)

Interpolacija.

U **metodi najmanjih kvadrata** pošli smo od dviju zavisnih veličina x i y, odnosno od n vrijednosti $x_1, x_2, ..., x_n$ veličine x i korespondirajućih n vrijednosti $y_1, y_2, ..., y_n$ veličine y.
Te dvije serije od po n podataka možemo shvatiti kao n uređenih parova:
$(x_1,y_1), (x_2,y_2), ... (x_n,y_n)$, koje geometrijski možemo predočiti kao n točaka ravnine.
Tada, od svih krivulja iz fiksirane familije krivulja, biramo onu koja *najbolje prolazi oko ovih točaka*.
Familija krivulja zadana je parametrima. Tako **dvoparametarska familija krivulja** može biti zadana kao skup grafova funkcija $f(x,a,b)$, gdje su a, b parametri, tj. kao skup krivulja s jednadžbama $y = f(x,a,b)$. Na primjer, skup svih pravaca u ravnini (koji nisu usporedni s y-osi), čini dvoparametarsku familiju krivulja s jednadžbama $y = ax+b$, gdje parametri a,b mogu biti bilo koja dva realna broja; dakle, u ovom je slučaju $f(x,a,b):=ax+b$, za a,b iz **R**.
Vidjeli smo kako se metodom najmanjih kvadrata odabiru parametri a,b tako da pripadna krivulja *najmanje odstupa* od mjerenih podataka.
Treba uočiti da rezultirajuća krivulja, općenito, ne prolazi zadanim točkama (u pravilu, ona **ne prolazi niti jednom od tih točaka**).
Za razliku od toga, interpolacijom rješavamo problem odabiranja krivulje iz zadane familije krivulja **koja prolazi svim točkama dobivenim mjerenjem**.

Interpolacijski polinom.

Uočimo da su u rezultatima mjerenja $(x_1,y_1), (x_2,y_2), ... (x_n,y_n)$ prve koordinate međusobno različite, a da druge mogu, ali ne moraju biti međusobno različite.
Kroz dvije takve točke u ravnini prolazi pravac s jednadžbom $y=ax+b$, i ako te dvije točke nemaju jednake druge koordinate, taj je pravac graf polinoma 1. stupnja, tj. $a\neq 0$.

Kroz tri takve točke općenito prolazi parabola s jednadžbom $y=ax^2+bx+c$, tj. graf polinoma 2. stupnja, osim ako te tri točke nisu na jednom pravcu.

Općenito, kroz n takvih točaka $(x_1,y_1), (x_2,y_2), ... (x_n,y_n)$ prolazi graf polinoma stupnja $(n-1)$, osim ako one nisu u nekom **posebnom** (**specijalnom**) **položaju**, kada je stupanj tog polinoma manji od $(n-1)$. Bilo kako bilo taj je polinom jednoznačno određen i zove se **interpolacijski polinom**.
Ima više načina zapisa i određivanja tog polinoma iz zadanih točaka, a najpoznatiji su onaj koji se pripisuje Lagrangeu i onaj koje se pripisuje Newtonu: **Lagrangeov interpolacijski polinom** i **Newtonov interpolacijski polinom**.
Slično kao kod metode najmanjih kvadrata, dobiveni interpolacijski polinom može poslužiti za **procjenu** vrijednosti veličine y, za neku vrijednost veličine x unutar ranga podataka (to se obično zove **interpolacija**) ili izvan (obično se naziva **ekstrapolacija**).

Primjer 1. Mjerenjem smo dobili podatke

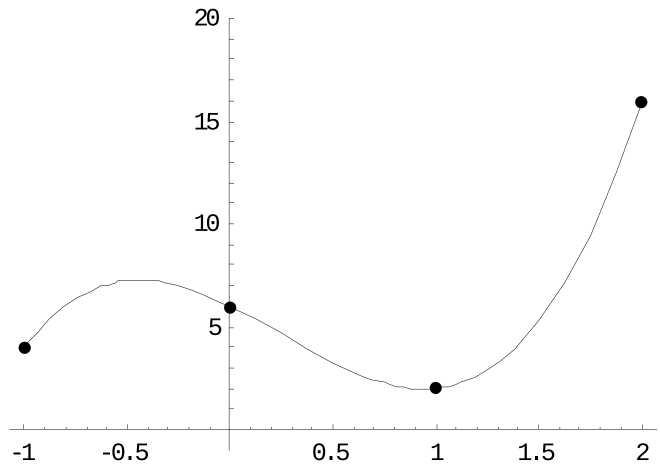
x_i	-1	0	1	2
y_i	4	6	2	16

(i) Odredimo interpolacijski polinom kojemu graf prolazi tim točkama.
(ii) Procijenimo vrijednost veličine x, ako je vrijednost veličine x jednaka 0.5, odnosno 1.5 (to su interpolacije)
(iii) Procijenimo vrijednost veličine x, ako je vrijednost veličine x jednaka 3 (to je, tzv. ekstrapolacija)

(i) Koristeći se Excelom (iako je za ovakve račune precizniji programski paket Mathematica) dobijemo da je pripadni interpolacijski polinom:
$f(x)= 4x^3-3x^2-5x+6$.
Zaista, nije teško provjeriti da je $f(-1)=4$, $f(0)=6$, $f(1)=2$ i $f(2) = 16$.

(ii) $f(0.5) = 0.5 – 0.75 – 2.5 +6 = 3.75$,
pa je tu $y \approx 3.75$.
$f(1.5) = 13.5 – 6.75 – 7.5 +6 = 5.25$,
pa procjenjujemo da je $y \approx 5.25$.

(iii) $f(3) = 108 – 27 – 15 +6 = 72$
pa procjenjujemo $y \approx 72$.
Te se procjene mogu izravno dobiti i u Excelu.
Rezultati su skicirani na sljedećoj slici:



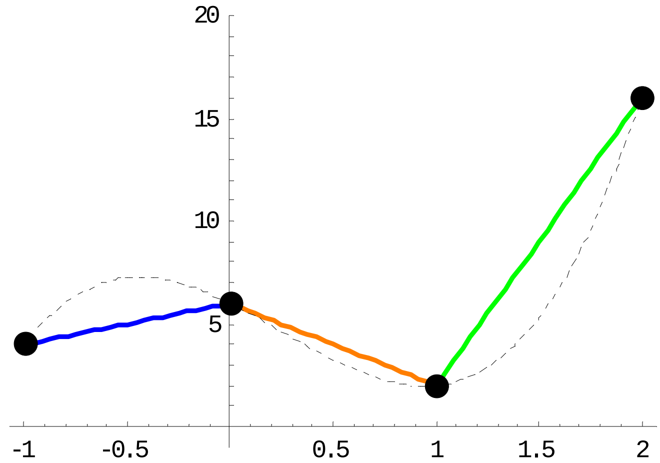
Interpolacija pomoću spline-a.

Uz dobra svojstva, interpolacijski polinom ima i nedostatke. Jedan od njih je taj što se povećavanjem broja mjerenja, stupanj polinoma, u pravilu povećava.
To se, metodom spline-a, razrješava tako da umjesto jednog polinoma velikog stupnja, koristimo više polinoma nižeg stupnja (između prve i druge točke prvi, između druge i trće točke drugi itd.). **Linearni spline** (**linearna aproksimacija)** dobiva se tako da se svake dvije susjedne točke spoje ravnom crtom, **kvadratni spline** tako da svake dvije susjedne točke spojimo dijelom parabole, a **kubni spline** da svake dvije susjedne točke spojimo dijelom grafa polinoma 3. stupnja.

Linearna aproksimacija – linearni spline.

Primjer 2. Podatke iz Primjera 1. linearno interpolirajmo te napravimo procjene (ii) i (iii).

točke (-1,4) i (0,6) povezujemo dijelom kubne funkcije s jednadžbom $y = 2x+6$,
točke (0,6) i (1,2) dijelom pravca s jednadžbom $y = -4x +6$,
a točke (1,2) i (2,16) dijelom pravca s jednadžbom $y = 14x – 12$.
Zato imamo sljedeće procjene:
za $x=0.5$ je $y \approx -2 +6 =4$
za $x=1.5$ je $y \approx 21-12 = 9$
za $x=3$ je $y \approx 30$ (nastavljamo s posljednjom jednadžbom).
Rješenja su ilustrirana crtežom.Uspoređivanjem s rješenjima pomoću interpolacijskog polinoma uočavamo i sličnosti razlike:



Kubni spline.

To je najčešći spline u primjenama. Za to postoje dva glavna razloga. Prvi je što je **stupanj tri** relativno nizak, pa računi nisu komplicirani. Drugi je što je taj stupanj *dovoljno visok*. Naime, graf polinoma trećeg stupnja u pravilu ima područja rasta i pada, lokalni minimum i lokalni maksimum te točku infleksije (sl. 5). Ta važna svojstva grafa odgovaraju važnim karakteristikama opisa inženjerskog procesa, odnosno veze među dvjema zavisnim varijablama:
kad se povećavanjem vrijednosti jedne veličine vrijednost druge povećava, odnosno smanjuje;
vrijednost prve veličine pri kojoj druga postiže najmanju, odnosno najveću vrijednost (u nekom intervalu);
te vrijednost prve veličine gdje vrijednost druge veličine prelazi iz ubrzanog rasta u usporeni (usporenog rasta u ubrzani, ubrzanog pada u usporeni ili usporenog pada u ubrzani).

Općenito, za *n* zadanih točaka $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots (x_n,y_n)$ računamo n kubnih funkcija $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

1. Prva kubna funkcija prolazi kroz prvu i drugu točku, druga kroz drugu i treću, itd., dok posljednja funkcija prolazi kroz pretposljednju i posljednju točku. To znači da će, ukupno gledano, kubni spline prolaziti kroz sve točke.
2. Uvjet da susjedne kubne funkcije u zajedničkoj točki imaju jednake prve derivacije – to znači da postoji brzina promjene u točkama interpolacije, odnosno da postoji tangenta na graf kubnog spline-a
3. Uvjet da susjedne kubne funkcije u zajedničkoj točki imaju jednake druge derivacije – to znači da postoji akceleracije u točkama interpolacije
4. Uvjet koji omogućuje da spline bude jedinstveno određen – ako nema dodatnih infomacija smatramo da su to tzv. prirodni uvjeti:
   $f_1''(x_1)=0$ i $f_n''(x_n)=0$

Primjer 3. Podatke iz Primjera 1. po dijelovima kubno interpolirajmo te napravimo procjene (ii) i (iii).

Korištenjem programskog paketa Mathematica dobivamo sljedeći rezultat:
točke (-1,4) i (0,6) povezujemo dijelom grafa kubne funkcije s jednadžbom

$$f_1(x) = -\frac{14}{5}x^3 - \frac{42}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + 6,$$

točke (0,6) i (1,2) dijelom grafa kubne funkcije s jednadžbom

$$f_2(x) = 8x^3 - \frac{42}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + 6,$$

a točke (1,2) i (2,16) dijelom grafa kubne funkcije s jednadžbom

$$f_3(x) = -\frac{26}{5}x^3 + \frac{156}{5}x^2 - \frac{216}{5}x + \frac{96}{5}.$$

Zato imamo sljedeće procjene:
za x=0.5 je y $\approx$ $f_2(0.5)$ = 3.1
za x=1.5 je y $\approx$ $f_3(1.5)$ = 7.05
za x=3 je y $\approx$ 30 (nastavljamo s posljednjom jednadžbom).
Rješenja su ilustrirana crtežom. Uspoređivanjem s rješenjima pomoću interpolacijskog polinoma uočavamo i sličnosti razlike: